CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2023/24 - Prova scritta 2024-02-14

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Un ristorante per il pranzo di lavoro propone un menù a base di carne (C) oppure un menù vegetariano (V). Ci sono due tipologie di clienti: i vegetariani, che quindi ogni volta a pranzo scelgono il menù V, e gli "onnivori", che ogni volta a pranzo scelgono uno a caso tra il menù C (con probabilità 90%) e l'alternativa V, indipendentemente dalle volte precedenti. Si stima inoltre che in generale i vegetariani siano il 20% tra i clienti del ristorante. Aldo è un cliente del ristorante: non si sa se sia effettivamente vegetariano ma in tutte le k occasioni in cui ha pranzato lì si è osservato che ha sempre scelto il menù V (dove $k \geq 0$ è un parametro).

1. Calcolare (in funzione di k) la probabilità che Aldo sia vegetariano.
2. Qual è la probabilità (in funzione di k) che Aldo scelga il menù C al $(k+1)$-esimo pranzo?
3. Per quali k si ha che è più probabile che Aldo al $(k+1)$-esimo pranzo scelga il menù V rispetto al menù C?

Una soluzione:

1. Dobbiamo calcolar la probabilità che Aldo sia vegetariano $=: A_V$ condizionata all'informazione $B_k :=$"in k pasti ha scelto sempre V". Se poniamo A_V^c l'alternativa "Aldo è onnivoro", la forma di Bayes darebbe

$$P(A_V|B_k) = P(B_k)|A_V)P(A_V)/\left[P(B_k|A_V)P(A_V) + P(B_k|A_V^c)P(A_V^c)\right].$$

Sappiamo dal testo che

$$P(A_V) = 20\%, \quad P(A_V^c) = 80\%, \quad P(B_k|A_V) = 1 \quad P(B_k|A_V^c) = (10\%)^k = 10^{-k}$$

Troviamo allora

$$P(A_V|B_k) = \frac{1}{1 + 4 \cdot 10^{-k}},$$

mentre

$$P(A_V^c|B_k) = 1 - P(A_V|B_k) = \frac{4 \cdot 10^{-k}}{1 + 4 \cdot 10^{-k}}.$$

2. Poniamo $C_k :=$ "Aldo prende carne per la prima volta alla $k+1$-esima occasione". Se sappiamo A_V e B_k allora la probabilità è 0, mentre se sappiamo A_V^c e B_k la probabilità è 9/10. Ne segue che per la formula di disintegrazione

$$P(C_k|B_k) = P(C_k|B_k \text{ e } A_V)P(A_V|B_k) + P(C_k|B_k \text{ e } A_V^c)P(A_V^c|B_k)$$
$$0 \cdot P(A_V|B_k) + \frac{9}{10} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-k}}{1 + 4 \cdot 10^{-k}}.$$

la probabilità richiesta è quindi

$$P(C_k|B_k) = \frac{9}{10} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-k}}{1 + 4 \cdot 10^{-k}}.$$

3. Abbiamo calcolato dal punto precedente la probabilità di C_k. Si tratta di trovare i valori di k per cui tale probabilità è $< 1/2$. Troviamo quindi

$$\frac{9}{10} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-k}}{1 + 4 \cdot 10^{-k}} < 1/2$$

ossia

$$\frac{9}{5} \cdot 2 \cdot 10^{-k} < \frac{1}{2} + 2 \cdot 10^{-k}$$

da cui

$$10^{-k} < \frac{5}{16} \approx 0.33$$

che vale già per $k \geq 1$. Quindi già dopo una sola volta in cui Aldo chiede il menù V, è più probabile che alla volta successiva chieda il menù V.

Problema 2

Sia X una variabile aleatoria continua a valori reali avente densità data dalla funzione

$$p(X = x) = c \cdot e^{-|x|} \quad \text{per } x \in \mathbb{R},$$

dove c è una opportuna costante.

1. Determinare c e calcolare il valore atteso di X.
2. Dire per quali $t \in \mathbb{R}$ si ha $\mathrm{MGF}_X(t) < \infty$.
3. Determinare la funzione quantile di X, $q_X : (0, 1) \to \mathbb{R}$.

Una soluzione:

1. Si ha $c = 1/2$. Per il valore atteso basta osservare che la densità è una funzione pari (e l'integrale improprio che definisce il valore atteso è ben definito) quindi $\mathbb{E}[X] = 0$.
2. Basta osservare che

$$\mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx-|x|} dx < \infty$$

solo se $|t| < 1$ (altrimenti l'integranda non è infinitesima a $-\infty$ oppure a $+\infty$)

3. Per calcolare la funzione quantile, osserviamo intanto che per $\alpha = 1/2$ (la mediana) si ha $q_X(\alpha) = 0$. Per $\alpha < 1/2$, dobbiamo determinare x tale che

$$\mathrm{CDF}_X(x) = \alpha,$$

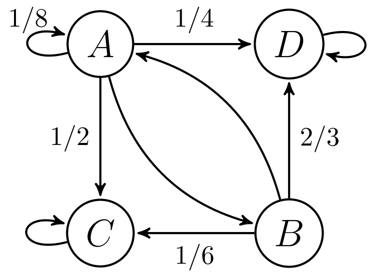
ma allora avremo $x < 0$, quindi con un cambio di variabile

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{x} e^{-|y|} dy = \frac{1}{2} \int_{-x}^{\infty} e^{-y} dy = \frac{1}{2} e^{x}.$$

troviamo quindi $q_X(\alpha) = \log(2\alpha)$. Per il caso $\alpha > 1/2$, osserviamo che essendo la densità pari vale $q_X(\alpha) = -q_X(1 - \alpha)$, quindi $q_X(\alpha) = -\log(2(1 - \alpha))$.

Problema 3

Si consideri la catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ con matrice di transizione Q rappresentata graficamente in figura.



1. Classificare gli stati della catena e calcolare tutte le distribuzioni invarianti.
2. Calcolare, se esiste, $\lim_{n\to\infty}(Q^n)_{i,j}$ per ogni $i, j \in \{A, B, C, D\}$.
3. Si sa inizialmente che $X_0 = A$ oppure $X_0 = B$. Dopo un tempo n molto grande (praticamente infinito) si osserva che $X_n = C$. Stimare X_0.

Una soluzione:

1. Gli stati $\{A, B\}$ sono transitori. Gli stati C e D sono ricorrenti (assorbenti) e costituiscono ciascuno una classe chiusa irriducibile. Pertanto le distribuzioni invarianti sono tutte della forma (ordinando gli stati nell'ordine alfabetico)

$$(0, 0, \alpha, 1 - \alpha)$$

al variare di $\alpha \in [0, 1]$.

2. Tutte le classi chiuse irriducibili sono regolari (ovviamente, essendo costituite da un singolo stato). Pertanto sappiamo dalla teoria che il limite esiste. Poniamo Q^∞ tale limite. Per calcolarlo osserviamo che, se partiamo dagli stati assorbenti, banalmente vale $Q^\infty_{C,\cdot} = (0, 0, 1, 0)$, e $Q^\infty_{D,\cdot} = (0, 0, 0, 1)$. D'altra parte se partiamo dallo stato A avremo $Q^\infty_{A,\cdot} = (0, 0, \alpha, 1 - \alpha)$ mentre $Q^\infty_{B,\cdot} = (0, 0, \beta, 1 - \beta)$ per opportuni α e $\beta \in [0, 1]$. Per determinarli impostiamo il sistema $Q^\infty = Q \cdot Q^\infty$. Bastano in realtà due equazioni:

$$Q^\infty_{AC} = Q_{AA}Q^\infty_{AC} + Q_{AC}Q^\infty_{CC} + Q_{AB}Q^\infty_{BC} + Q_{AD}Q^\infty_{DC}$$

ossia

$$\alpha = \frac{1}{8}\alpha + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{8}\beta$$

e

$$Q^\infty_{BC} = Q_{BA}Q^\infty_{AC} + Q_{BC}Q^\infty_{CC} + Q_{BD}Q^\infty_{DC}$$

ossia

$$\beta = \frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{6} \cdot 1$$

Troviamo quindi le equazioni

$$7\alpha = 4 + \beta, \quad 6\beta = \alpha + 1$$

che risolte danno

$$\alpha = \frac{25}{41}, \quad \beta = \frac{11}{41}.$$

3. Calcoliamo la verosimigilanza

$$L(X_0 = A; X_n = C) = P(X_n = C | X_0 = A) = (Q^n)_{AC} \approx \frac{25}{41},$$

avendo usato il risultato del punto precedente e l'approssimazione $n \to \infty$. Similmente,

$$L(X_0 = B; X_n = C) = P(X_n = C | X_0 = B) = (Q^n)_{BC} \approx \frac{11}{41}.$$

Ne segue che la stima di massima verosimigilanza per X_0 è A, ossia è più probabile che inizialmente la catena si trovasse in A.